Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

158 | Été 2002
Varia

M. Aigner, G. M Ziegler, "Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes", Paris, Springer Verlag, 2002

M. Aigner, G. M Ziegler, "Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes", Paris, Springer Verlag, 2002

Olivier Hudry

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/2908
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 mars 2002
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Olivier Hudry, « M. Aigner, G. M Ziegler, "Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes", Paris, Springer Verlag, 2002 », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 158 | Été 2002, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 19 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/2908

BIBLIOGRAPHIE CRITIQUE

Martin AIGNER, Günter M. ZIEGLER, *Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*, Springer-Verlag France, Paris, 2002 (traduction par N. Puech et J.-M. Morvan de *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998 et 2001).

Paul Erdös aimait à dire que Dieu possède un grimoire, Le Grand Livre, dans lequel sont consignées les plus élégantes démonstrations des théorèmes mathématiques. Il ajoutait qu'on pouvait ne pas croire en Dieu mais, en tant que mathématicien, qu'on devait croire en l'existence du Grand Livre... Appréciant cette histoire, Martin Aigner et Günter M. Ziegler ont proposé à Paul Erdös de tenter de reconstituer une partie du Grand Livre, ce que ce dernier accepta avec enthousiasme. Leur reconstitution devait paraître en mars 1998 pour les 85 ans de Paul Erdös. Malheureusement, celui-ci est mort en 1996, deux ans avant la parution du livre sous le titre *Proofs from THE BOOK*. Après une réédition (en anglais) en 2001, vient de paraître, cette année, une traduction en français.

Comme l'indique le titre français, l'objectif de ce livre est de recenser un certain nombre de démonstrations mathématiques que leur esthétique distingue des autres preuves. Ce qui compte est donc, non la beauté ou la simplicité de l'énoncé du théorème, comme cela serait le cas pour le grand théorème de Fermat, ni l'importance ou la fécondité du résultat démontré, ce qui serait le cas de la conjecture de Riemann si elle devenait théorème, ni encore la notoriété de la proposition établie, par exemple les théorèmes de Gödel, mais bien l'élégance de la preuve elle-même.

Cette exigence avait conduit les auteurs à sélectionner, pour la première édition en anglais, trente sujets regroupés en cinq familles :

• Théorie des nombres avec six sujets : « Six preuves de l'infinité des nombres premiers », « Le postulat de Bertrand » (sur l'existence, pour tout $n \geq 1$, d'un nombre premier entre n et $2n$), « Les coefficients binomiaux ne sont (presque) jamais des puissances », « Représentation des nombres comme somme de deux carrés », « Tout corps fini est commutatif », « Quelques nombres irrationnels ».

• Géométrie avec neuf sujets : « Le troisième problème de Hilbert : la décomposition des polyèdres », « Droites du plan et décomposition de graphes », « Le problème des pentes » (nombre minimum de pentes distinctes définies par n points du plan non alignés), « Trois applications de la formule d'Euler » (formule liant le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de faces d'un graphe plan), « Le théorème de rigidité de Cauchy » (pour les polyèdres de dimension 3), « Le problème des treize sphères » (sur le nombre de sphères unitaires touchant simultanément une sphère unitaire donnée), « Simplexes contigus » (sur le nombre de simplexes de dimension d dont les intersections deux à deux sont toutes de dimension $d - 1$), « Tout grand ensemble de points a un angle obtus », « La conjecture de Borsuk » (consistant à savoir, en dimension d, s'il est toujours possible de partitionner un ensemble de diamètre fini non nul en au plus $d + 1$ ensembles de diamètre plus petit ; le lecteur intéressé pourra s'amuser à montrer facilement que $d + 1$ ensembles peuvent en effet être nécessaires ; la partie difficile de la conjecture portait sur la question de savoir si $d + 1$ ensembles suffisent toujours ; on sait maintenant que la conjecture de Borsuk est fausse, mais la dimension du plus petit contre-exemple connu actuellement est quand même égale à 323...).

• Analyse avec quatre sujets : « Ensembles, fonctions et hypothèse du continu » (où il est question de l'infini, ou plutôt des infinis), « À la gloire des inégalités » (en particulier celle de Cauchy-Schwarz et celles liant les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique), « Un théorème de Pólya sur les polynômes », « Sur un lemme de Littlewood et Offord » (concernant les racines des équations algébriques).

• Combinatoire avec cinq sujets : « Le principe des tiroirs et le double décompte » (où l'on aborde des conséquences du principe selon lequel, quand on place n objets dans r tiroirs avec $r < n$, au moins l'un des tiroirs contient au moins deux objets), « Trois théorèmes célèbres sur les ensembles finis », « La formule de Cayley pour le nombre d'arbres », « Comment compléter un carré latin », « Le problème de Dinitz » (lequel est un problème de coloration d'une grille carrée, avec un ensemble de couleurs possibles associé à chaque case de la grille).

• Théorie des graphes avec six sujets : « Cinq-colorations des graphes planaires » (il s'agit de colorations pour lesquelles des ensembles de couleurs sont associés aux sommets du graphe considéré), « Comment surveiller un musée » (en fonction du nombre de murs d'un musée dont les salles sont polygonales mais non nécessairement convexes, combien faut-il au minimum de gardiens fixes et pouvant regarder dans toutes les directions pour surveiller toutes les salles du musée ?), « Le problème de Turán » (combien d'arêtes un graphe sans clique de taille donnée peut-il contenir ?), « Communiquer sans erreur » (problèmes de codes correcteurs d'erreurs), « Amis et politiciens » (concerne le « théorème de l'amitié » : si, dans un groupe, deux personnes quelconques ont exactement un ami commun, alors il existe une personne qui est l'ami de tout le monde), « Les probabilités facilitent (parfois) le dénombrement » (où l'on applique les méthodes probabilistes à des problèmes de graphes).

Dans la version française, les auteurs ont remplacé le chapitre sur les treize sphères par trois nouveaux chapitres : deux en analyse (sur la fonction cotangente et sur l'aiguille de Buffon), un en combinatoire (sur les chemins dans les treillis et le calcul des déterminants). Un effet positif de cette révision est de mieux équilibrer les parties, même si la répartition de certains sujets est parfois arbitraire (ainsi retrouve-t-on des problèmes relevant de la théorie des graphes dans d'autres parties). Une autre conséquence est de prendre un peu de distance par rapport aux travaux de P. Erdös, même s'il reste à juste titre fréquemment cité dans l'ouvrage (comme le précise la préface, « Cet ouvrage reflète le point de vue de Paul Erdös à propos de ce qui devrait être considéré comme une preuve du Grand Livre »).

Bien sûr, le lecteur pourra toujours chercher des démonstrations absentes qu'il jugera pourtant dignes de figurer dans cette tentative de reconstruction du Grand Livre ; il en trouvera sûrement, abordant éventuellement d'autres domaines mathématiques (par exemple l'algèbre ; il est peut-être plus délicat de trouver des démonstrations simples en topologie...). Ainsi, en théorie des nombres, la preuve établissant que $\sqrt{p}$ n'est pas un rationnel si p est un entier premier. Ou bien les théorèmes de Menger en théorie des graphes (qui, il est vrai, nécessitent comme résultat préalable le théorème du flot maximum et de la coupe de capacité minimum). Ou encore, en géométrie, la démonstration donnant l'expression des côtés, quand ceux-ci doivent être entiers, de tous les triangles de Pythagore, ce qui pouvait de plus donner lieu à l'introduction de certaines techniques de preuve (par exemple la méthode de la descente infinie) de cas particuliers du grand théorème de Fermat.

Il n'en reste pas moins que ce livre a su identifier, dans des domaines mathématiques variés, des démonstrations qui retiendront l'attention et l'intérêt du lecteur, tâche ardue qui prouve au passage l'étendue des connaissances des auteurs (et de l'instigateur, Paul Erdös, dont on se demande s'il n'aurait pas dû figurer parmi les auteurs, même à titre posthume). Des connaissances, mais aussi des talents pédagogiques, car il n'était pas toujours facile d'expliquer clairement les démonstrations retenues, d'autant que les auteurs souhaitaient s'adresser à des « lecteurs dont les connaissances mathématiques se restreignent à un premier cycle universitaire ». Avouons-le, avoir des connaissances plus élevées ne nuit cependant pas pour mieux apprécier certaines démonstrations, même si les auteurs ont eu la bonne idée de renvoyer à des encarts ou des annexes certains points plus techniques. Signalons aussi la qualité de la traduction, due à Nicolas Puech et Jean-Marie Morvan, et dont la rigueur, en dépit de quelques fautes de frappe résiduelles, a pu préserver la clarté de l'exposé. Si l'on compare à la version originale, on constatera d'ailleurs que la version française a été l'occasion d'améliorer le contenu du livre (ce qu'avait déjà commencé à faire la seconde édition anglaise) en corrigeant des erreurs (difficile d'écrire des preuves divines !) et en actualisant certains résultats (par exemple la borne mentionnée plus haut pour la conjecture de Borsuk, découverte en 2000 seulement), ce qui fait de l'édition française, non sans doute le grimoire divin à reconstituer, mais actuellement la version la plus achevée, avec ses trois chapitres supplémentaires et malgré le retrait de celui consacré aux treize sphères.

Si l'on ajoute à ces considérations le souci de la présentation, avec un texte aéré, agrémenté de nombreuses illustrations (certaines destinées à comprendre plus facilement les démonstrations, d'autres à vocation plus humoristique), complété par un utile index, on obtient un livre original, qui suscite d'abord la curiosité, puis bientôt l'intérêt, avec des résultats à découvrir ou à redécouvrir accessibles à un assez large public, en tout cas très nettement non réduit à des mathématiciens professionnels.

Bref, un livre hautement recommandable qui, comme l'espère la quatrième de couverture, « séduira tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques ».

O. HUDRY